مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(y+\sqrt{x^2-y^2})dx - x\,dy = 0$$

نحاول أن نكتب المعادلة $y' = d\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$$

لنتحقق من أنها متجانسة نستبدل كل x بـ λx وكل y بـ λy $\Leftarrow$

$$= \frac{\lambda(y+\sqrt{x^2-y^2})}{\lambda x} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

فالمعادلة متجانسة في x و y الصفرية.

$$\frac{y}{x} = Z \Rightarrow y = x.Z$$

$$\Rightarrow y' = Z + x.Z'$$

نعوض

$$\Rightarrow Z + xZ' = Z + \sqrt{1+Z^2}$$

★ $$x.Z' = \sqrt{1+Z^2}$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة ، نفصل متحولاتها

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \arcsin Z = \ln cx$$

$$\Rightarrow Z = \sin \ln cx$$

نعوض في المتحولات القديمة:

$$\boxed{y = x.\sin \ln cx}$$ وهو الحل العام

المعادلات التفاضلية التي ترد إلى معادلات متجانسة:

ندرس هنا المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

وهنا $ax+by+c$ وهي معادلة مستقيم وليكن D.

" " " " $a_1x+b_1y+c_1$ ‏D_1.

إذا كان $c=c_1=0$ المعادلة المباشرة هي معادلة متجانسة أما المستقيمين متقاطعين ندرس هنا حالة المعادلة المتجانسة وهي الحالة الثالثة (حالة تقاطع المستقيمين) وفيها تكون كل من النسب $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ أو $a.b_1 \neq a_1.b$ عندئذٍ توجد نقطة تقاطع بين المستقيمين ولتكن النقطة A والتي إحداثياتها α, β تحقق كلا المستقيمين أي:

$$a\alpha + b\beta + c = 0$$

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

عندئذٍ نجري التحويل التالي وهو عملية إزاحة لنقطة:

$$x = X + \alpha$$

$$y = Y + \beta$$

نعوض في المعادلة ⟸ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ وعندئذٍ بتعويض في المعادلة المعطاة سيكون لدينا:

$$\frac{dY}{dX} = f\left[\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\right]$$

والمعادلة أصبحت معادلة في كل من X و Y متجانسة وحلها العام على شكل دالة في كل من X, Y وبذلك نحصل على الحل العام للمعادلة المتجانسة السابقة بالعودة إلى المتحولات القديمة نحصل على الحل العام.

مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x+y+2)dx + (2x+2y-1)dy = 0 \quad \star$$

نحاول أن نكتب المعادلة على الشكل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x-y-2}{2x+2y-1}$$

$$D_1: -x-y-2=0 \quad ; \quad D_2: 2x+2y-1=0$$

نلاحظ أن المستقيمين D_1, D_2.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

أي المستقيمان متوازيان ويمكن أن نأخذ المعين إذا المعين يساوي الصفر يكونا متوازيين أيضاً.

SUBJECT:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -2+2=0$$

نفرض أن

$$Z = x+y \Rightarrow y = Z - x \Rightarrow y' = Z' - 1$$

نعوض في المعادلة ★

$$(Z+2)dx + (2Z-1)(dZ-1) = 0$$

$dZ = Z'$ وفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة.

$$(3-Z)dx + (2Z-1)dZ = 0$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة نفصل متحولاتها.

$$\frac{2Z-1}{3-Z}dZ + dx = 0$$

الآن نكامل

$$\int \frac{2Z-1}{3-Z}dZ + \int dx = \int 0$$

نضيف ونطرح للبسط 5 في التكامل الأول.

$$\int \frac{2Z-6+5}{3-Z}dx + x = c$$

لنوزع البسط على المقام.

$$\int \left(-2 + \frac{5}{3-Z}\right)dZ + x = c$$

$$-2Z - 5\ln|Z-3| + x = c$$

$$x + 2y + 5\ln|x+y-3| = c$$

المعادلة التفاضلية المتجانسة في الأبعاد:

تعريف: نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى $F(x,y,y')=0$ [1] شكلها أنها متجانسة في الأبعاد من الدرجة n إذا تحقق الشرط:

$$\forall \lambda \neq 0 : F(\lambda x, \lambda^n y, \lambda^{n-1} y') = \lambda^n F(x,y,y')$$

نقول عندئذٍ عن هذه المعادلة أنها متجانسة في الأبعاد. لنفرض أن $\lambda = \frac{1}{x}$ عندئذٍ المعادلة [1] تصبح على الشكل:

$$F\left(1, \frac{y}{x^n}, \frac{y'}{x^{n-1}}\right)$$

عندئذٍ يمكن إرجاع هذه المعادلة إلى معادلة ذات متحولات منفصلة بإجراء التحويل التالي:

$$\frac{y}{x^n} = u \Rightarrow y = x^n . u \Rightarrow y' = n x^{n-1} . u + x^n . u'$$

ملاحظة: في الحال أن المعادلة لديامى الرتبة الثانية وأعلى ندخل متحول جديد وليكن t على شكل $x = e^t$ وعند الأشتقاق لدالة y نشتقها ضمنياً لأنها أصبحت y دالة في x و x دالة في t.

وعندئذٍ بتعويض هذا التحويل في المعادلة المعطاة نحصل على معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة نفصل متحولاتها ونكامل وبالعودة إلى المتحولات القديمة نجد الحل العام للمعادلة المعطاة.

مثال: أثبت أن المعادلة التالية متجانسة في الأبعاد من المرتبة الثانية ثم أوجد الحل العام لها

$$(x^3 + x . y) y' = y^2 - x^2$$

نعوض عن كل x بـ λx وكل y بـ λy وكل y' بـ $y' . \lambda^{n-1}$ نعوض في المعادلة نفك القوس:

$$x^3 . y' + x . y . y' = y^2 - x^4$$

$$\lambda^3 . x^3 . \lambda^{n-1} . y' + \lambda x . \lambda^n . y . \lambda^{n-1} . y' = \lambda^{2n} . y^2 - \lambda^4 . x^4$$

$$\lambda^{n+2} . x^3 . y' + \lambda^{2n} x . y . y' = \lambda^{2n} . y^2 - \lambda^4 . x^4$$

نساوي بين جميع القوى لـ λ.

$$\boxed{n+2} = 2n = 2n = \boxed{4}$$

$$\Rightarrow n + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أنها من الدرجة الثانية.

ولإيجاد الحل العام نفرض

$$\frac{y}{x^n} = u \Rightarrow y = x^n . u$$

$$\Rightarrow y' = n . x^{n-1} . u + x^n . u'$$

نعوض في المعادلة المعطاة

$$x^3 (n . x^{n-1} . u + x^n . u') + x . y (n . x^{n-1} . u + x^n . u')$$

SUBJECT:

$= x^{2n} \cdot u^2 \cdot x^4$

نفك الأقواس ونجمع الحدود ونختصر فينتج لدينا .

$2u + x \cdot u' + 2u^2 + x\, u \cdot u' = u^2 - 1$

$x(u+1)u' + 2u(u+1) = (u-1)(u+1)$

$x u' + 2u = u - 1$

$x u' = -u - 1 = -(u+1)$

$\int \frac{du}{u+1} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u+1) = -\ln x + \ln c$

$u + 1 = \frac{c}{x} \Rightarrow u = \frac{c}{x} - 1$

$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{c}{x} - 1 \Rightarrow \boxed{y = cx - x^2}$

وهي عبارة الحل العام.

Bilal